

平成 21 年度

大学院工学研究科修士課程

材料工学専攻入学資格試験 問題冊子

材料基礎学 A

120 点満点

9:30 ~ 11:30

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は表紙と白紙 1 枚のほかに 6 ページである。
3. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。
4. 試験開始の合図の後、まず落丁・乱丁のないことをチェックすること。



## 材料基礎学 A

## [問題 1]

以下の文章《A》～《C》を読んで設問に答えよ。なお、設問中の化学式の後ろの記号 (s) は固体の状態，記号 (aq) は水溶液中のイオンの状態であることをそれぞれ示す。必要ならば，ファラデー定数  $F$  を  $9.65 \times 10^4 \text{ C/mol}$  とせよ。また，気体はすべて理想気体とし，簡単のため，水溶液中の溶存イオンの活量はその濃度に等しいと考えよ。

## 文章《A》

現在の自然科学は，主として SI 単位系を使用することを推奨しているが，実用的にはこれとは異なる単位系を使用する機会も多い。例えば SI 単位で示した (ア) 気体定数  $R$  は  $8.314 \text{ J/K}\cdot\text{mol}$  であるのに対し，単位を  $\text{cal/K}\cdot\text{mol}$  あるいは  $\text{L}\cdot\text{atm/K}\cdot\text{mol}$  (L : リットル) とした場合の  $R$  の数値は，それぞれ [ ① ] および [ ② ] となる。

温度  $25^\circ\text{C}$  において，ある気体を水上置換で捕集したところ，気体部分の体積は  $190 \text{ cm}^3$ ，全圧は  $740 \text{ mmHg}$  であった。この気体を乾燥後，圧力を  $760 \text{ mmHg}$  に保ったところ，その体積は  $179 \text{ cm}^3$  になった。この結果から，温度  $25^\circ\text{C}$  における水の飽和蒸気圧は [ ③ ] と計算される。

ある金属酸化物  $2.151 \text{ g}$  を還元して，対応する金属の単体  $1.718 \text{ g}$  を得た。十分高い温度でこの金属固体の比熱を測定したところ  $0.0938 \text{ cal/K}\cdot\text{g}$  であった。この金属の原子量は [ ④ ] である。

温度  $-10^\circ\text{C}$  の過冷却状態の水  $100 \text{ g}$  が，気圧  $1 \text{ atm}$  のもとで同じ温度の氷に不可逆変化した。このときのエントロピー変化は [ ⑤ ] である。ただし，氷と水の定圧モル比熱をそれぞれ  $9.00$  および  $18.0 \text{ cal/K}\cdot\text{mol}$ ，氷の融解熱を  $1.438 \text{ kcal/mol}$  とする。

問1 [ ① ] および [ ② ] の値を有効数字 3 桁で求めよ。但し，温度  $0^\circ\text{C}$ ，気圧  $1 \text{ atm}$  で物質  $1 \text{ mol}$  の気体が占める体積を  $22.414 \text{ L}$  とする。

問2 下線部 (ア) に関し，物質  $1 \text{ mol}$  の理想気体の温度を，一定圧力のもとで  $1^\circ\text{C}$  上昇させたとき，この気体が体積膨張でなした仕事は気体定数  $R$  に等しくな

材料基礎学 A

ることを簡単に示せ.

問3 [ ③ ] の値を有効数字3桁で求め, 単位を付して答えよ.

問4 [ ④ ] の値を概算せよ.

問5 [ ⑤ ] の値を有効数字3桁で求め, 単位を付して答えよ. 計算の際, 気相は考慮しなくてよい.

文章《B》

金属イオンの電解還元による金属析出(電析法)は, 純金属や合金の皮膜形成や, 金属製錬プロセスにおいて重要な技術である. いま, 不純物として少量の硫酸カドミウムを含む, 硫酸酸性の硫酸亜鉛水溶液を考える. この溶液中では, 2価の亜鉛およびカドミウムは水和イオンとして溶存し, これを  $M^{2+}(aq)$  ( $M = Zn, Cd$ ) と書くことにする. 半電池反応



の, 温度 298 K における標準電極電位は, 標準水素電極 (SHE) 基準でそれぞれ  $-0.763$  V および [ ⑥ ] である. したがって, この水溶液から金属 Zn を電析しようとすれば, 金属 Cd が不純物として共析する可能性がある. これを防ぐには, (1) 亜鉛粉末を溶液に添加し, 置換反応



によって, 不純物の  $Cd^{2+}(aq)$  イオンをあらかじめ取り除けばよい. このような浄液操作はセメンテーションと呼ばれ, この操作の後, 適当な電位で電解すれば純度 99% 以上の金属 Zn を得ることができる. (2) このときの電析電流効率は 90% 以上になる.

問6 温度 298 K における化学種  $Cd^{2+}(aq)$  の標準生成ギブズエネルギー (標準化学ポテンシャル) が  $-77.74$  kJ/mol であるとき, [ ⑥ ] の値を有効数字3桁で求めよ.

材料基礎学 A

問7 イオン反応(3)を書き下せ. 下線部 (イ) の浄液操作により, 温度 298 K の水溶液中の  $\text{Cd}^{2+}(\text{aq})$  イオンの活量  $a_{\text{Cd}^{2+}}$  を理論上どの程度まで下げることができるか有効数字1桁で見積もれ. このとき  $\text{Zn}^{2+}(\text{aq})$  イオンの活量  $a_{\text{Zn}^{2+}}$  は1とし, 浄液操作の前後で  $a_{\text{Zn}^{2+}}$  は変化しないと仮定せよ.

問8 反応(1)の標準電極電位は, 水素イオンの還元による水素発生電位に比べてかなり低いにもかかわらず, 下線部 (ウ) のように高い電流効率で金属 Zn の電析が起こる理由を述べよ.

文章《C》

Pourbaix が創案した電位-pH 図は, 水溶液中における酸化還元や酸塩基反応を理解するのに役立つ一種の熱力学的状態図である. 次のページの図 1(a) は Zn-H<sub>2</sub>O 系の電位-pH 図であり, 高い pH 領域では2価の亜鉛は水酸化物  $\text{Zn}(\text{OH})_2(\text{s})$  として沈殿することがわかる. このような沈殿形成を防ぐには,  $\text{Zn}^{2+}$  イオンに対して配位能をもつ適当な配位子 (例えばアンモニア  $\text{NH}_3$  など) を適量添加すればよい. 図 1(b) に示すように, Zn-NH<sub>3</sub>-H<sub>2</sub>O 系のような配位子を含む系の電位-pH 図も工夫すれば描くことができる. この電位-pH 図において,  $\text{Zn}(\text{NH}_3)_4^{2+}(\text{aq})$  と  $\text{Zn}(\text{s})$  の境界線は pH 9 前後で曲がっている. この pH は酸塩基平衡反応



の酸解離定数  $\text{p}K_a$  ( $\approx 9.2$ ) に対応している. すなわち, 直線部 (i) および (ii) 付近の半電池反応は, それぞれの pH 領域で優勢な化学種を用いて



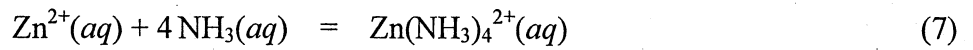
と表現できる.

問9 式(5)および式(6)の半電池反応式を書き下せ.

問10 半電池反応(1)および(6)の標準電極電位を, それぞれ  $E_1^\circ$  および  $E_6^\circ$  とする.

また, 錯生成反応

材料基礎学 A



の標準ギブズエネルギー変化を $\Delta G_7^\circ$ とする。気体定数を $R$ 、ファラデー定数を $F$ とすると、 $E_6^\circ$ 、 $E_1^\circ$ 、および $\Delta G_7^\circ$ の間にどのような関係があるか示せ。

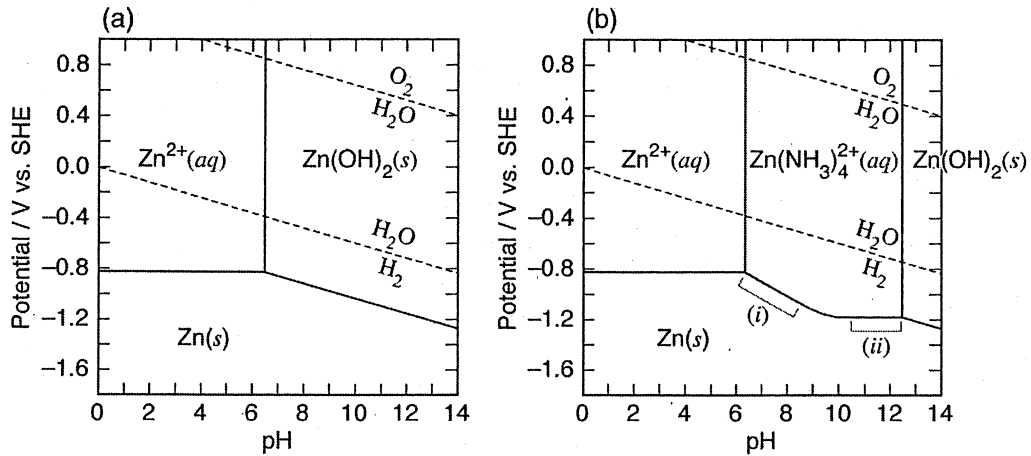


図1 (a) Zn-H<sub>2</sub>O系および (b) Zn-NH<sub>3</sub>-H<sub>2</sub>O系の電位-pH図。(温度を298 K、溶存Zn(II)種の活量を0.01、NH<sub>4</sub><sup>+</sup>(aq)とNH<sub>3</sub>(aq)の濃度の和を5 mol/Lとして計算)

## 材料基礎学 A

## [問題 2]

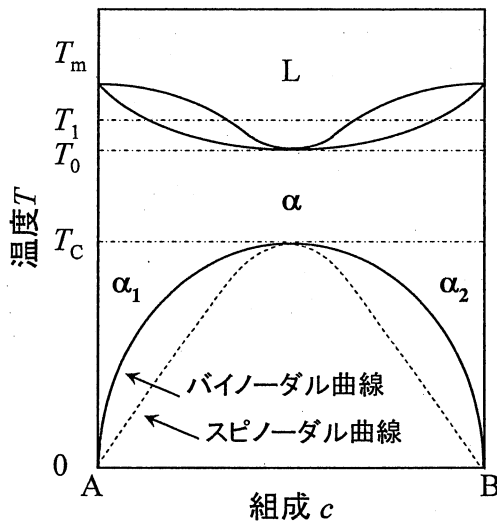
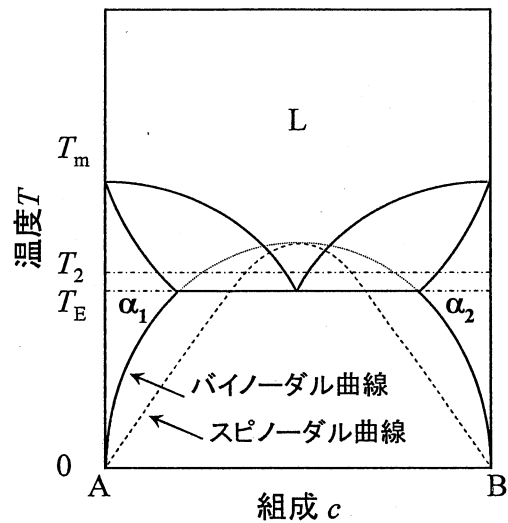
A-B 合金 1 モルあたりの自由エネルギーに基づいて二元合金状態図を考える。次の文章を読み、以下の問に答えよ。ただし、アボガドロ数を  $N$ 、気体定数を  $R$  とし、必要ならばスターリングの近似式  $\ln M! = M \ln M - M$  を用いてよい。

純金属固体 A, B の結晶構造は同一で、合金化してもその構造は不変である。A, B 両金属とも同素変態はなく、融点はそれぞれ  $T_m^A$ ,  $T_m^B$  であり、1 モルあたりの融解のエントロピー変化(液相のエントロピーから固相のそれを引いた量)はそれぞれ  $\Delta S_m^A$ ,  $\Delta S_m^B$  である。液相および固相の自由エネルギーは、最近接原子間相互作用のみを考慮した正則溶体近似で表されるものとし、温度上昇に伴う空孔などの欠陥形成や体積膨張、振動のエントロピー、圧力の効果などは無視する。固相および液相における相互作用パラメータをそれぞれ  $\Omega_S$ ,  $\Omega_L$  とする。

- 問1 元素 A の組成が  $1-c$ 、元素 B の組成が  $c$  の合金 (以下、組成  $c$  の合金とよぶ) において、両原子が無秩序に配列した固溶体中の A-A, B-B および A-B 最近接原子対の数  $N_{AA}$ ,  $N_{BB}$  および  $N_{AB}$  を、配位数を  $Z$ 、両原子の総数を  $N$  として求めよ。
- 問2 固相における最近接原子対  $i-j$  の結合エネルギーを  $\varepsilon_{ij} (< 0)$  とする。組成  $c$  の合金の固溶体の内部エネルギー  $E_S(c)$  は、組成  $c$  に依存しない相互作用パラメータ  $\Omega_S$  を用いて、 $E_S(c) = \varepsilon_{AA} N_{AA} + \varepsilon_{BB} N_{BB} + \varepsilon_{AB} N_{AB} = (1-c)E_{A,S}^\circ + cE_{B,S}^\circ + c(1-c)\Omega_S$  と表現できる。ここで、 $E_{A,S}^\circ$  および  $E_{B,S}^\circ$  は純物質固体 1 モルの内部エネルギーである。 $\Omega_S$  を  $N$ ,  $Z$ ,  $\varepsilon_{AA}$ ,  $\varepsilon_{BB}$ ,  $\varepsilon_{AB}$  を用いて表せ。
- 問3 問2 で求めたように、正則溶体近似における固溶体の内部エネルギーは組成  $c$  のみの関数として表現されるので、固溶体の配置のエントロピー  $S_S(E_S(c))$  も組成  $c$  のみの関数  $S_S(c)$  となる。 $S_S(c)$  を求めよ。また、温度  $T$  における固溶体のヘルムホルツ自由エネルギー  $F_S(c, T)$  を  $c$ ,  $T$ ,  $\Omega_S$ ,  $E_{A,S}^\circ$ ,  $E_{B,S}^\circ$ ,  $R$  を用いて表せ。
- 問4 組成  $c$  の合金における液相のエントロピー  $S_L(c)$  と  $S_S(c)$  との差は  $(1-c)\Delta S_m^A + c\Delta S_m^B$  であると仮定する。温度  $T$  における組成  $c$  の合金の液相のヘルムホルツ自由エネルギー  $F_L(c, T)$  を  $c$ ,  $T$ ,  $\Omega_L$ ,  $E_{A,S}^\circ$ ,  $E_{B,S}^\circ$ ,  $T_m^A$ ,  $T_m^B$ ,  $\Delta S_m^A$ ,  $\Delta S_m^B$ ,  $R$  を用いて表せ。

## 材料基礎学 A

次に、前問までに求めた固相および液相の自由エネルギー関数に基づいて具体的な合金状態図を考える。自由エネルギーの基準は純粋固体物質 ( $E_{A,S}^{\circ} = E_{B,S}^{\circ} = 0$ ) とする。また、両元素の融点は等しく  $T_m^A = T_m^B = T_m$  であり、融解エントロピーについても同様に  $\Delta S_m^A = \Delta S_m^B = \Delta S_m$  とする。ここでは  $\Omega_s = 8300 \text{ J/mol}$ ,  $\Omega_L = -700 \text{ J/mol}$ ,  $\Delta S_m = 9.0 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$  と設定した。図1は  $T_m = 1250 \text{ K}$  とした場合の状態図を模式的に描いたものであり、図2は  $T_m$  がある温度  $T_x$  よりも低い場合に起こる共晶状態図 ( $T_E$ : 共晶温度) である。また状態図中の  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  は相の種類を意味する。ただし、具体的な計算においては、気体定数  $R$  は  $8.3 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$  とせよ。

図1  $T_m = 1250 \text{ K}$  の場合の状態図.図2  $T_m < T_x$  の場合の状態図.

- 問5 図1の  $T_0$ ,  $T_1$  および図2の  $T_E$ ,  $T_2$  における固相および液相のヘルムホルツ自由エネルギーの組成依存性の概略図を描け。ただし、自由エネルギーの数値を書き込む必要はないが、基準点や形状、大小関係など特徴的な点を明確にすること。
- 問6 バイノーダル曲線およびスピノーダル曲線の温度  $T$  と組成  $c$  を関連付ける式を示せ。
- 問7 図1における  $T_0$  および  $T_c$  の値を求めよ。なお導出過程も解答欄に簡潔に示すこと。
- 問8  $T_m < T_x$  のとき図2のような共晶状態図になる。 $T_x$  を  $\Omega_s$ ,  $\Omega_L$ ,  $\Delta S_m$ ,  $R$  を用いて表し、 $T_x$  の値を求めよ。なお、導出過程も解答欄に簡潔に示すこと。



平成 21 年度

大学院工学研究科修士課程

材料工学専攻入学資格試験 問題冊子

材料基礎学 B

180 点満点

13:00 ~ 16:00

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は表紙と白紙 1 枚のほかに 11 ページである。
3. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。
4. 試験開始の合図の後、まず落丁・乱丁のないことをチェックすること。



材料基礎学 B

[問題 1]

六方晶系に属する結晶のX線構造因子について考えてみよう。なお、結晶のX線構造因子  $F$  は次式で表すことができる。

$$F(hkl) = \sum_{j=1}^N f_j \exp\{2\pi i(hu_j + kv_j + lw_j)\}$$

ここで、 $N$  は単位格子あたりに含まれる原子の数、 $f_j$  は単位格子に含まれる  $j$  番目の原子のX線原子散乱因子、 $hkl$  はミラー指数、 $u_j v_j w_j$  は格子定数で規格化した  $j$  番目の原子の位置座標を表す。

問1 底面が菱形で、一辺の長さが  $a$ 、高さが  $c$  の単純六方晶の単位格子を図1に示す。単純六方晶のX線構造因子  $F_h(hkl)$  を求めなさい。なお、X線構造因子を計算する際、X線原子散乱因子は  $f$  とする。

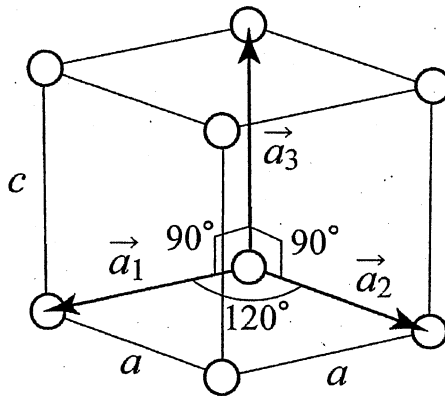


図1 単純六方晶の単位格子。

材料基礎学 B

問2 単純六方晶の逆格子空間の(001)面を，図2に示した三角格子の点Oを原点として与えられた三角格子に描き，各逆格子点のミラー指数を記入しなさい．三角格子は一辺の長さが  $a^{-1}$  の正三角形であり，三角格子の各辺の方向は単純六方晶の底面の2つのベクトル  $\vec{a}_1$ ，  $\vec{a}_2$  と図2のような関係が成り立っているものとする．

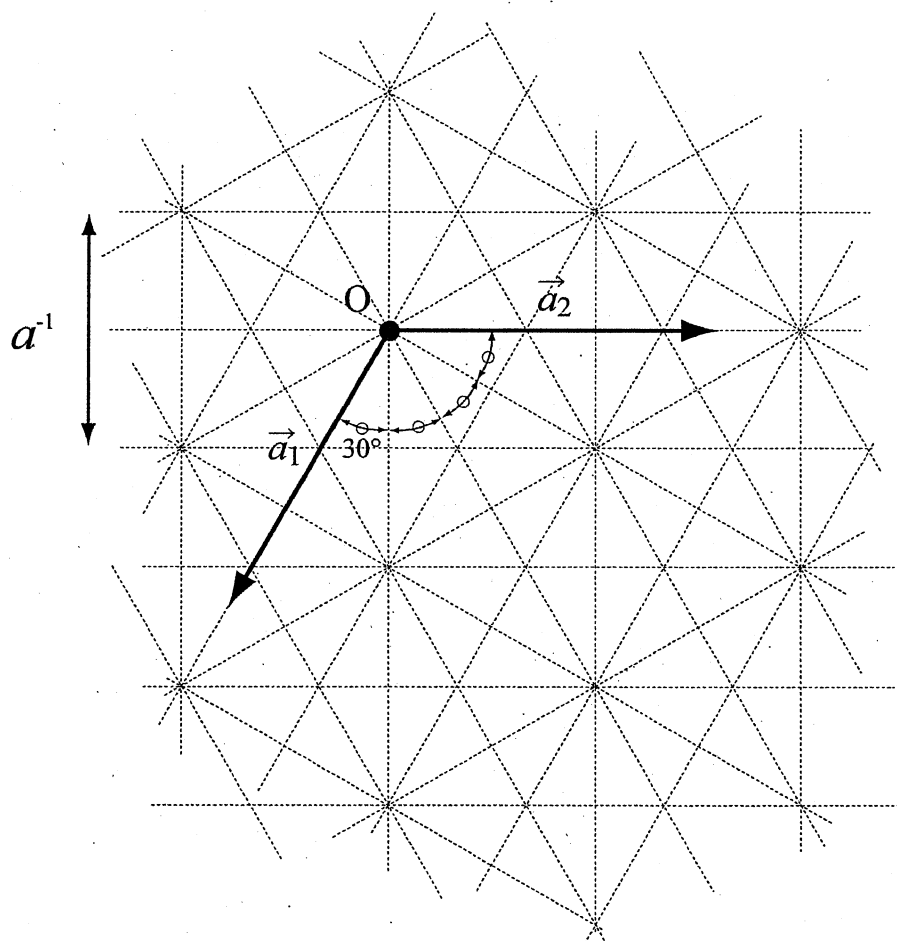


図2 逆格子空間の(001)面および実格子ベクトル  $\vec{a}_1$ ，  $\vec{a}_2$  .

問3 図1の単純六方晶の  $1/3$   $2/3$   $1/2$  の位置に，新たな同種原子を加えると，最密六方晶になる．最密六方晶の X 線構造因子  $F_{\text{hcp}}(hkl)$  を求めなさい．ここで求めた  $F_{\text{hcp}}(hkl)$  の値が，ミラー指数の組合せによって異なる場合には， $F_{\text{hcp}}(hkl)$  の値をミラー指数  $hkl$  で分類しなさい．

材料基礎学 B

問4 グラファイトの構造は、 $a=2.46\text{\AA}$ 、 $c=6.70\text{\AA}$  の格子定数をもつ六方晶である。  
問3で求めた最密六方晶に、もう1つ最密六方晶を、もとの最密六方晶の原点  
に対して  $1/3\ 2/3\ 0$  だけずらせた位置に重ね合わせると、グラファイトの構造に  
なる。最密六方晶は単位格子あたり2個の原子を含んでいる。したがって、グ  
ラファイトは、六方晶単位格子あたり4個の炭素原子を含むことになる。グラ  
ファイトの構造因子  $F_g(hkl)$  を問3で求めた  $F_{hcp}(hkl)$  を使って表せ。なお、炭素の  
X線原子散乱因子は  $f$  とする。ただし、 $F_g(hkl)$  の値を  $hkl$  で分類する必要はない。

図3は、銅をターゲットとするX線管球に40kVの電圧をかけて得られるX線スペ  
クトルの模式図である。スペクトルは、影をつけた部分で示される波長と共に連続的  
に変化する強度分布①と、 $1.39\text{\AA}$  と  $1.54\text{\AA}$  に現れる鋭い強度分布②から構成されてい  
る。

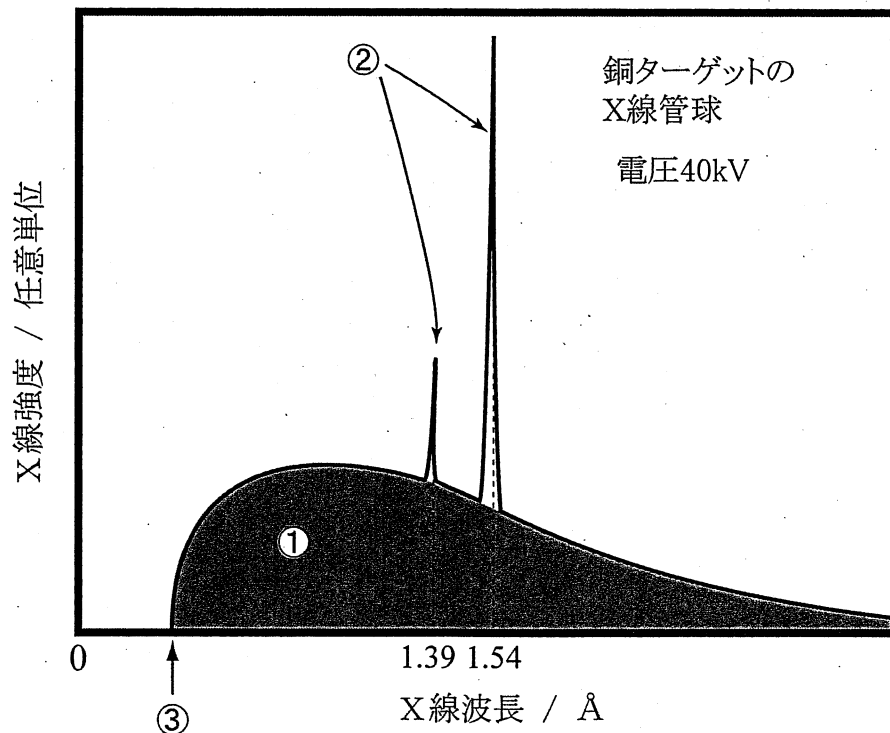


図3 銅をターゲットとするX線管球に40kVの電圧をかけて得られたX線スペクトルの模式図。

材料基礎学 B

- 問5 図3の①について、一般的な呼び名と、波長に対して連続的な強度分布が得られる理由について簡潔に説明しなさい。
- 問6 図3の②について、一般的な呼び名と、 $1.39\text{ \AA}$  と  $1.54\text{ \AA}$  に鋭い強度分布を示す理由について簡潔に説明しなさい。
- 問7 図3の③は、①の最も短い波長に対応し、短波長端と呼ばれる。上記の条件下で得られた短波長端の波長を求めなさい。なお、プランク定数は  $6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ 、光速は  $3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ 、電気素量は  $1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$  とする。
- 問8 グラファイトは、六方晶の底面、すなわち(001)面に平行な面をもつ比較的大きな板状単結晶を容易に作製できるという特徴がある。そのため、図3のようなX線管球から発生するX線スペクトルから、特定の波長のスペクトルだけを底面によるブラッグ回折を利用して選択的に取り出すモノクロメータ用単結晶として広く利用されている。グラファイト単結晶を図4のようにX線管球の出口に設置し、図3の  $1.54\text{ \AA}$  に現れる鋭い強度分布のみを取り出す場合、入射X線とグラファイト単結晶の表面とのなす角  $\theta_m$  は何度に設定すればよいか求めなさい。

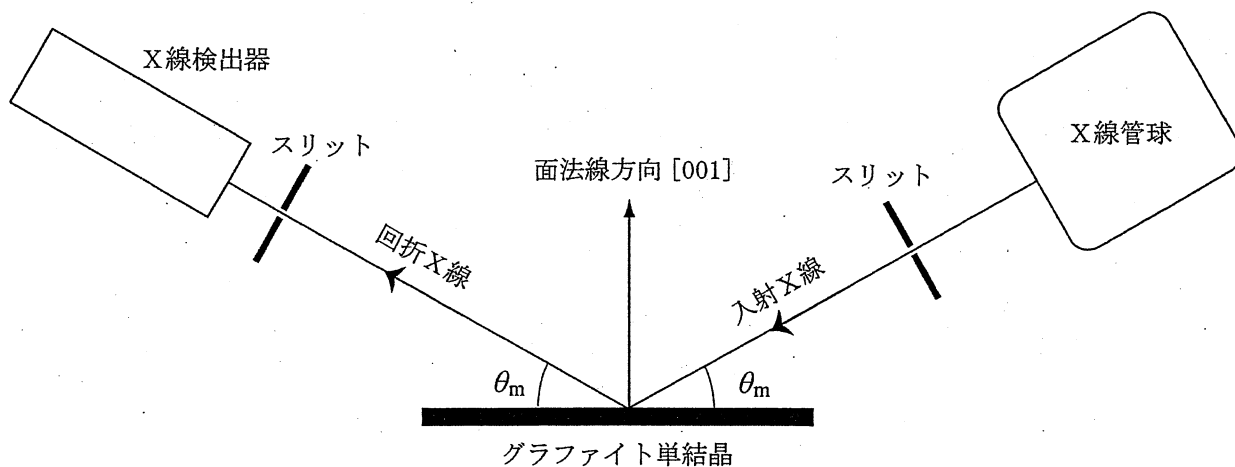


図4 グラファイト単結晶の底面での回折を利用した単色化の実験配置。

材料基礎学 B

[問題 2]

以下の文章〈ア〉 および 文章〈イ〉を読みそれぞれの間に答えよ。

文章〈ア〉

水素様イオンとは、水素原子と同様に1個の電子と原子核からなるイオンのことを指し、具体的には  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ , …….,  $\text{Ne}^{9+}$  などがそれに該当する。いま原子番号を  $Z$  とすると、この水素様イオン内の電子の従うシュレディンガー方程式の具体的な形は、原子単位系では

$$\left[ -\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{Z}{r} \right] \varphi(\vec{r}) = \varepsilon \varphi(\vec{r}) \quad (1)$$

となる。なお原子単位系とは、電子の質量  $m$ 、電子の電荷  $e$ 、プランク定数  $h$  を  $2\pi$  で割った値  $\hbar$ 、 $4\pi\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0$  は真空の誘電率) をすべて1にとる単位系であり、SI 単位系に比べて式の形が簡単になる。

式(1)を極座標で取り扱う。波動関数が球対称であるとき、角度に関する偏微分項はすべてゼロになるので、式(1)は、原子核からの距離  $r$  の常微分方程式となる。このとき、

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \quad (2)$$

である。この常微分方程式の解のうち、エネルギー固有値  $\varepsilon$  が最小となる解は、 $\varphi(r) = P \exp(-Qr)$  という関数形を持つ。ここで  $P$  と  $Q$  は定数である。波動関数は規格化する。この状態にある電子に関して、以下の間に答えよ。

必要ならば、次の公式を使ってよい。

$$\int_0^{\infty} x^n \exp(-ax) dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \quad (3)$$

材料基礎学 B

- 問1 定数  $P$  と  $Q$  をそれぞれ求めよ.
- 問2 エネルギー固有値  $\varepsilon$  を求めよ.
- 問3 電子の原子核からの平均距離  $\langle r \rangle$  を求めよ.
- 問4 問2 および問3 の解に基づいて、水素様イオン内の電子の波動関数  $\varphi(r) = P \exp(-Qr)$  について、原子核からの平均距離  $\langle r \rangle$  とエネルギー固有値  $\varepsilon$  が原子番号  $Z$  の増大に伴いどのように変化するか図示せよ.
- 問5 問4 の解がこのようになる理由を簡潔に論述せよ.

文章<イ>

図1に示すような1次元の階段状のポテンシャル  $V(x)$  に  $x$  軸の負の十分に遠方から電子が進行してきて、その一部、あるいは全部が反射されている状態を考える.

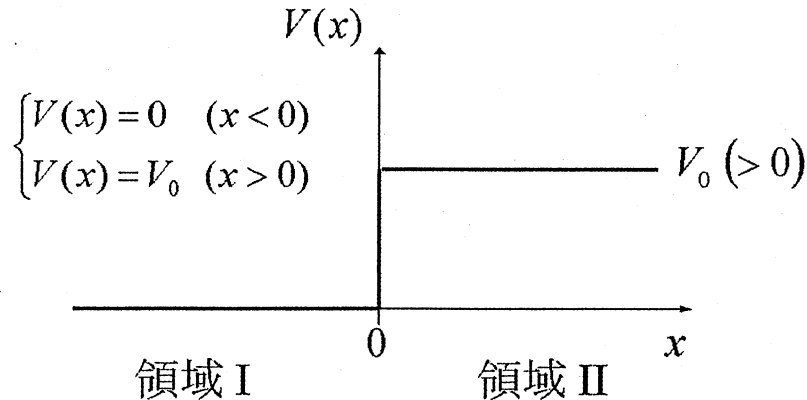


図1

定常状態として、時間を含まないシュレディンガー方程式で取り扱うことにする.  
文章<ア>と同様に原子単位系を用いると、シュレディンガー方程式は、

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x) \quad (4)$$

と書くことができる.

この方程式の解として、領域 I ( $x < 0$ ) の波動関数を、正方向の運動量を持つ進行波



材料基礎学 B

と負方向の運動量をもつ進行波の重ね合わせとして

$$\varphi_I(x) = A \exp(ik_1x) + B \exp(-ik_1x) \quad (k_1 > 0) \quad (5)$$

と書くことにする。領域 II ( $x > 0$ ) の波動関数は、 $\varepsilon$  と  $V_0$  の大小によって異なる形状を持つ。 $\varepsilon > V_0$  の場合は、正方向の運動量を持った進行波で表され、それを

$$\varphi_{II}(x) = C \exp(ik_2x) \quad (k_2 > 0) \quad (6)$$

と書くことにする。ここで  $A, B, C$  は一般に複素数の係数である。なおこの文章<イ>では波動関数の規格化を行わない。 $A, B, C$  の関係は、領域 I と II の境界で両者の波動関数とその 1 次の微係数がそれぞれ連続であるという条件から求められる。このとき負の遠方から進行してきた電子がポテンシャルによって反射される割合（反射率）は、

$\frac{|B|^2}{|A|^2}$  で与えられる。以下の問に答えよ。

問6 式(5)および(6)の中の  $k_1$  および  $k_2$  を求めよ。

問7  $\varepsilon > V_0$  である場合、下線部の条件から求められる  $A, B, C$  の関係を示せ。

問8  $\varepsilon > V_0$  の場合に反射率が  $\frac{1}{4}$  であった。このときの  $\varepsilon$  を  $V_0$  を使って表せ。

問9  $\varepsilon < V_0$  の場合、領域 II の波動関数  $\varphi_{II}(x)$  は、 $x$  が増大するにつれて減衰する。

$\varepsilon = \frac{1}{2}V_0$  のときに、領域 I および領域 II における電子の密度関数  $\rho(x)$  を求めよ。

なお電子の密度関数  $\rho(x)$  は波動関数  $\varphi(x)$  に対して、その複素共役  $\varphi^*(x)$  を用いて  $\rho(x) = \varphi^*(x)\varphi(x)$  で与えられる。

問10 問9で求めた領域 I および領域 II における電子の密度関数  $\rho(x)$  を図示せよ。

材料基礎学 B

[問題 3]

次の文章を読み、問に答えなさい。

ある温度で熱膨張係数の異なる2種類の金属平板を貼り合わせた複合材料は、温度が変化すると全体が反るような弾性変形をする。それぞれの金属が等方弾性体で、板厚が十分薄いとき、弾性変形した板の中央部の形状は球面となる。この球面の曲率半径を以下の手順《1》～《3》で求める。

手順《1》：まず1枚の金属平板を球面に弾性変形させた場合について考える。厚さ  $d$  の金属平板を図1に示すように球面に弾性変形させた場合を考え、板内部の歪を求める。破線は変形前の平板、実線は曲率半径  $R$  ( $\gg d$ ) の球面に弾性変形した板を表す。図1に示すように板の表面上の点  $P$  を原点とし、平板の垂線を  $z$  軸、平板の面内に  $x$  軸、 $y$  軸をとる直交座標系を採用する。

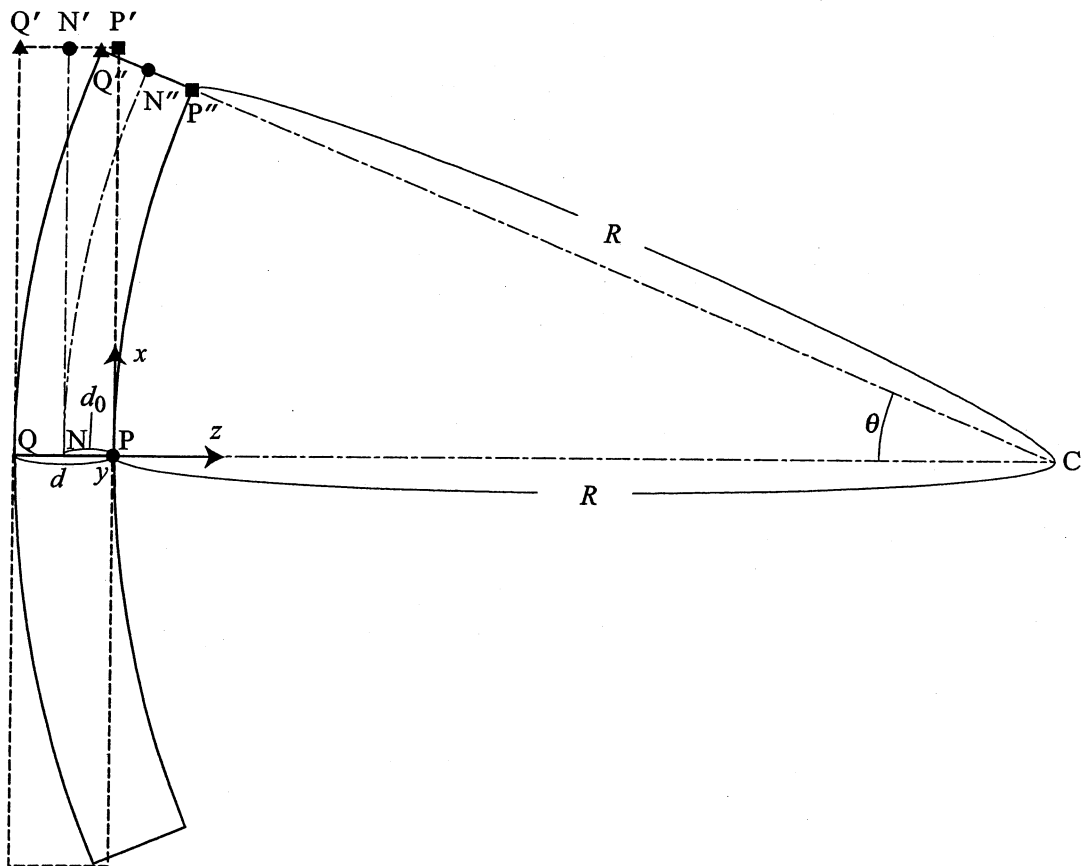


図1

材料基礎学 B

変形前の  $\overline{PP'}$  は変形後に  $\widehat{PP''}$  ( $\widehat{PP''}$  は弧  $PP''$  を表す) となる. ここで  $\angle PCP'' = \theta$  とすると,  $\widehat{PP''}$  の長さは  $R\theta$ ,  $\widehat{QQ''}$  の長さは  $(R + d_0)\theta$  である. このとき, 幾何学的に図1の  $\overline{NN'}$  の長さと  $\widehat{NN''}$  の長さが等しくなる点  $N$ , 点  $N'$ , 点  $N''$  が存在する. 点  $N'$  の座標を  $(x, 0, -d_0)$  とすると,  $x = (R + d_0)\theta$  が成り立つ.

図1における弾性変形に伴う変位について考える. 変形前の点  $P'$  の座標を  $(x, 0, 0)$  とすると, 変形後の点  $P''$  の座標は  $R, \theta$  を用いて表すと [ ア ] である. したがって, 点  $P'$  の変形に伴う変位を  $x, R, \theta$  を用いて表すと [ イ ] と求められる. また, 変形前の座標  $(x, 0, z)$  で表される一般点の弾性変形による変位を  $x, z, R, \theta$  を用いて表すと [ ウ ] となる.

[ ウ ] の変位から歪を求めるため, 変位の  $x, z$  方向に関する偏微分をとる.  $R \gg d_0$  であること, および  $x \approx 0$  では  $\sin\theta \approx x/(R + d_0)$ ,  $\cos\theta \approx 1$  と近似できることを用いて  $x = 0$  における歪を求めると, 全てのせん断歪と  $z$  方向の伸縮歪は 0,  $x$  方向の伸縮歪は  $R, d_0, z$  を用いて表すと [ エ ] である. また, 対称性から  $y$  方向の伸縮歪は [ オ ] である. このようにして, 球面に弾性変形させたときの  $x$  方向と  $y$  方向の伸縮歪  $\varepsilon_{xx}(z)$ ,  $\varepsilon_{yy}(z)$  が求められる.

手順《2》: 次に温度変化に伴う熱膨張・収縮による1枚の金属平板の歪を求める. 温度  $T_0$  における金属平板の長さを  $L_0$  とする. 平板の線熱膨張係数を温度に依存しない定数  $\alpha (\ll 1)$  とするとき, 温度  $T$  における金属平板の長さは [ カ ] となる.

ここでは, 単位長さあたりの金属平板の熱膨張・収縮による長さ変化を固有歪  $\varepsilon^*$  と呼ぶ. 温度  $T_0$  における固有歪を 0 とするとき, 温度  $T$  における金属平板の固有歪  $\varepsilon^*(T)$  を  $\alpha, T_0, T$  を用いて表すと, [ キ ] となる.

手順《3》: 最後に, 2種類の金属平板を温度  $T_0$  で貼り合わせた複合材料が温度変化によって弾性変形する場合を考える. 2種類の金属平板 A, B の厚さを  $d^A, d^B$ , 温度  $T$  における固有歪を  $\varepsilon^{A*}, \varepsilon^{B*}$  (ただし  $0 < \varepsilon^{A*} < \varepsilon^{B*} \ll 1$ ) とする. 図2で, 破線

## 材料基礎学 B

は温度  $T_0$  で貼り合わせた複合材料を表し、実線は温度  $T$  において曲率半径  $R$  の球面に弾性変形した複合材料を表す. 図2の点  $N$ , 点  $N'$ , 点  $N''$  は, 温度  $T_0$  における  $\overline{NN'}$  の長さ  $d_0$  と温度  $T$  における  $\widehat{NN''}$  の長さが等しくなる点を表し, 点  $N$  の  $z$  座標を  $-d_0$  とする. このように  $d_0$  をとることによって, 温度  $T_0$  から温度  $T$  への変化に伴って生じる歪  $\varepsilon_{xx}(z)$ ,  $\varepsilon_{yy}(z)$  は手順《1》で求めた [ エ ], [ オ ] と同じ式で表される. ただし, この場合の  $\varepsilon_{xx}(z)$ ,  $\varepsilon_{yy}(z)$  は, 熱膨張・収縮による固有歪 ( $\varepsilon^{A*}$  または  $\varepsilon^{B*}$ ) に材料中の弾性歪  $\varepsilon_{xx}^{el}(z)$ ,  $\varepsilon_{yy}^{el}(z)$  を加えたものである. 温度  $T$  における金属板 A, B 中の弾性歪  $\varepsilon_{xx}^{A,el}(z)$ ,  $\varepsilon_{xx}^{B,el}(z)$  を  $R$ ,  $z$ ,  $d_0$ ,  $\varepsilon^{A*}$ ,  $\varepsilon^{B*}$  を用いて表すと, それぞれ [ ク ] ( $-d^A \leq z \leq 0$ ), [ ケ ] ( $-(d^A + d^B) \leq z \leq -d^A$ ) となる. 以上で弾性歪が求められたので, この弾性歪と金属 A, B の弾性係数  $E^A$ ,  $E^B$  を用いて弾性歪エネルギー  $U$  を表すことができ, これから曲率半径  $R$  を求めることができる.

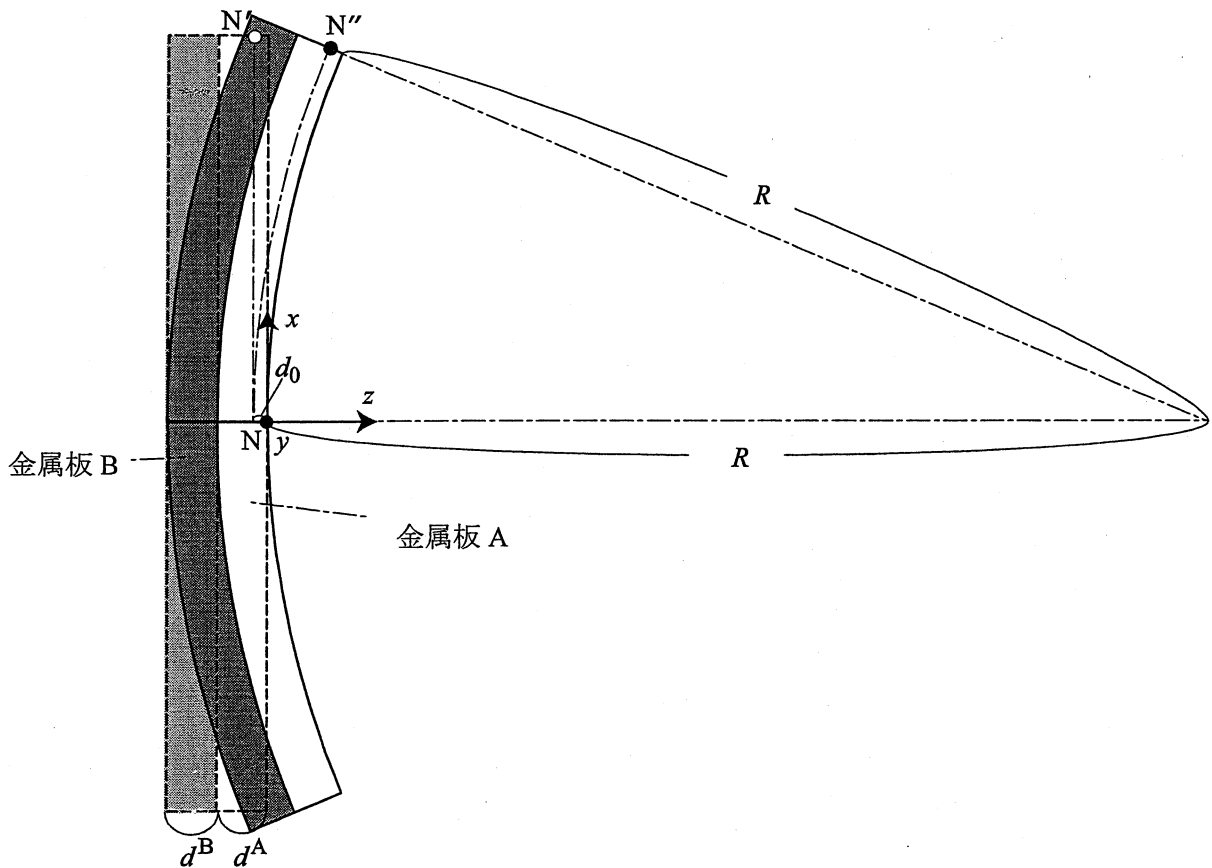


図2

## 材料基礎学 B

問1 文章中 [ ア ] ~ [ ケ ] に入る適切な式を求めよ。

問2 下線部の弾性定数  $E^A$ ,  $E^B$  は,  $x$ ,  $y$  の2方向のみに伸縮応力が加えられたときの弾性率である. この弾性率を  $E$  とし, 等方弾性体で一般的に用いられるラメ係数  $\lambda$ ,  $\mu$  との関係を求める. ここでは,  $x$ ,  $y$  方向の伸縮歪をいずれも  $\varepsilon^{\text{el}}$  とし,  $x$ ,  $y$  方向に働く伸縮応力を  $E\varepsilon^{\text{el}}$ , また  $z$  方向の伸縮歪を  $-\nu\varepsilon^{\text{el}}$  ( $\nu$  は定数) とする. せん断歪, せん断応力,  $z$  方向の伸縮応力は0であることを注意し,  $E$  と  $\nu$  を  $\lambda$ ,  $\mu$  を用いて表せ. ただし, 直交座標系における応力と歪の関係は以下のよう表される.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

問3 弾性歪エネルギー  $U = U(R, d_0)$  を  $R$ ,  $z$ ,  $d^A$ ,  $d^B$ ,  $d_0$ ,  $\varepsilon^{A*}$ ,  $\varepsilon^{B*}$ ,  $E^A$ ,  $E^B$  を用いて表せ. ただし  $z$  に関する積分は実行しなくて良い.

問4  $E^A = E^B$ ,  $d^A = d^B$  とし,  $R$  を与えられた定数と考えたとき, 問3で求めた  $U$  を最小にする  $d_0$  を  $R$ ,  $d^A$ ,  $\varepsilon^{A*}$ ,  $\varepsilon^{B*}$  を用いて表せ (導出過程も示すこと).

問5 問4と同様,  $E^A = E^B$ ,  $d^A = d^B$  とし, 問4で求めた  $d_0$  と  $R$  の関係式が成り立つとき, 力学的に最も安定な曲率半径  $R$  を  $d^A$ ,  $\varepsilon^{A*}$ ,  $\varepsilon^{B*}$  を用いて表せ (導出過程も示すこと). 計算を行う際には  $z' = z + d^A$  とおくと良い.

平成 21 年度

大学院工学研究科修士課程

材料工学専攻入学資格試験 問題冊子

工業数学

100 点満点

9:30 ~ 11:00

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題冊子は表紙と白紙 1 枚のほかに 4 ページである。
3. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。
4. 試験開始の合図の後、まず落丁・乱丁のないことをチェックすること。



## 工業数学

## [問題1]

以下の問1～問2に解答せよ。

## 問1

内積が定義された実数上の $n$ 次元のベクトル空間を $\mathbf{R}^n$ とし、 $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル $\phi$ と $\psi$ についてその内積を $\langle\phi|\psi\rangle$ と表記する。 $\langle\phi|\psi\rangle=0$ のとき $\phi$ と $\psi$ は直交するといい、 $\langle\phi|\phi\rangle=1$ のとき、ベクトル $\phi$ は規格化されているという。このとき、下記の(a)、(b)に解答せよ。

- (a)  $\mathbf{R}^n$ 上のゼロでないベクトル $v$ は、 $\mathbf{R}^n$ 上の規格化されたベクトル $v_a$ および $v_b$ の線形結合として式(1)のように表わされることを示せ。ただし、 $v_a$ は任意であるが、 $v_b$ は $v_a$ と直交するベクトルの一つである。

$$v = Av_a + Bv_b \quad (1)$$

また、係数 $A$ と $B$ を $v$ 、 $v_a$ 、 $v_b$ を用いて表せ。

- (b)  $\mathbf{R}^n$ 上のゼロでない任意の $p$ 個の一次独立なベクトル $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ を用いて、新しい $p$ 個のベクトル $\{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ を得る次の手続きを考える。

$$\begin{aligned} r_1 &= \langle v_1|v_1\rangle^{-1/2} v_1 \\ r_2 &= \langle r'_2|r'_2\rangle^{-1/2} r'_2, \quad r'_2 = v_2 - \langle v_2|r_1\rangle r_1 \\ r_3 &= \langle r'_3|r'_3\rangle^{-1/2} r'_3, \quad r'_3 = v_3 - \langle v_3|r_2\rangle r_2 - \langle v_3|r_1\rangle r_1 \\ &\vdots \\ r_p &= \langle r'_p|r'_p\rangle^{-1/2} r'_p, \quad r'_p = v_p - \sum_{i=1}^{p-1} \langle v_p|r_i\rangle r_i \end{aligned} \quad (2)$$

このとき、新しく得られた $p$ 個のベクトル $\{r_1, r_2, \dots, r_p\}$ が全て互いに直交し、かつ規格化されていることを示せ。

## 問2

実数を係数とする2次の多項式 $f(x) = ax^2 + bx + c$ はベクトル空間 $\mathbf{R}[x]_2$ を構成する。このベクトル空間 $\mathbf{R}[x]_2$ における式(3)の線形変換 $T$ を考える。

$$T[f(x)] = f(0)x^2 + 2f'(x)x + f(0) \quad (3)$$

ただし、 $f'(x)$ は $f(x)$ の $x$ による微分を表す。このとき $\mathbf{R}[x]_2$ 上の基 $\{1, x, x^2\}$ に対する線形変換 $T$ を行列で表現し、その固有値と固有ベクトルを求めよ。ただし、 $T$ は基 $\{1, x, x^2\}$ に右から作用するものとする。



## 工業数学

## [問題 2]

ある光源からの単色光 (X線や電子波などでもよい) が,  $x$  軸に沿って置かれたスリットを通過して回折される場合を考える. 光はスリットに垂直に入射し, スリットを透過した直後の光の振幅 (スリット関数と呼ばれる) が  $f(x)$  であるとき, 光の入射方向に対して角度  $\theta$  の方向に回折される光の強度は, 遠方では  $|F(k)|^2$  に比例する. ここに  $F(k)$  は  $f(x)$  のフーリエ変換であり, 光の波長を  $\lambda$  とするとき  $k = (2\pi/\lambda) \sin \theta$  である. このスリットによる回折について以下の問1~問3に解答せよ.

問1

$f(x)$  は図1(a)のような高さ1, 幅  $2w$  のスリット関数であるとする. このとき  $f(x)$  のフーリエ変換  $F(k)$  を求めよ. ただし,  $w$  は正の実数である.

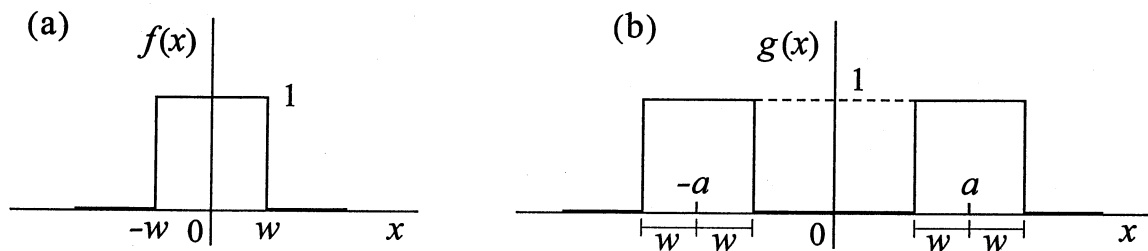


図1. 1重スリット(a)および2重スリット(b)のスリット関数.

問2

図1(b)のような高さ1, 幅  $2w$ , 間隔  $2a$  の2重スリットのスリット関数を  $g(x)$  とするとき,  $g(x)$  のフーリエ変換  $G(k)$  を求めよ. ただし,  $w, a$  は正の実数であり,  $w < a$  であるとする.

問3

図1(a)の1重スリットの場合と図1(b)の2重スリットの場合について, 回折光の強度  $|F(k)|^2$ ,  $|G(k)|^2$  の振舞いの違いを図示せよ. ただし,  $a = 2w$  であるとする.

## 工業数学

## [問題 3]

$x$  軸に沿った長さ  $A$  の1次元の棒状試料の温度分布  $T(x, t)$  を考える. 今, 試料の端点 (これを  $x = 0$  および  $x = A$  とする) の温度は常に0に保たれ,  $t = 0$  における初期温度分布  $T(x, 0)$  は  $f(x)$  であるとする. このとき時刻  $t > 0$  における温度分布  $T(x, t)$  は, 熱伝導方程式を解くことにより次のような級数として表される.

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-D(n\pi/A)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{A}\right) \quad (4)$$

$$T(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{A}\right) \quad (5)$$

ここに  $D$  は試料の熱拡散率である. (5) 式は  $f(x)$  を奇関数として区間  $[-A, A]$  に拡張した関数のフーリエ級数展開であると見なすことができる.

今, 試料の初期温度分布は図2に示す台形の分布であり,  $f(x)$  は両端から深さ  $a$  までは直線的に変化し,  $a$  より内部では一定値  $T_0$  をとるものとする. このとき係数  $c_n$  を決定し,  $T(x, t)$  を求めよ. ただし,  $0 < 2a \leq A$  であるとする.

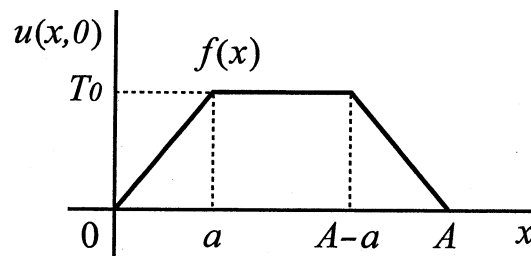


図2. 初期温度分布.

## 工業数学

## 参考資料

## 1. 三角関数の性質

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \left( \frac{x+y}{2} \right) \cos \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left( \frac{x+y}{2} \right) \sin \left( \frac{x-y}{2} \right)$$

## 2. フーリエ級数展開

区分的に連続な周期  $L$  の周期関数  $f(x)$  は、以下のようにフーリエ級数に展開できる。

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) \right]$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \cos \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) \sin \left( \frac{2n\pi x}{L} \right) dx$$

## 3. フーリエ変換とその性質

関数  $f(x)$  のフーリエ変換  $F(k)$  とその逆変換は、以下のように定義される。

$$F(k) = \mathcal{F}[f(x)] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ikx} dk$$

$x_0, k_0$  を実定数とするとき、フーリエ変換には次の性質がある。

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = F(k) e^{-ikx_0}, \quad \mathcal{F}[f(x) e^{ik_0 x}] = F(k - k_0)$$